LAHENDUSED 10.klass

1. *Vastus:* **60%**.

Lahendus. Olgu lammaste arv talus x ja lehmade arv y.

Kokku on talus sellisel juhul $(x+y)$ looma. Et 85% lambaid ja 10% lehmi arvavad, et nad on lambad, mis moodustab 55% loomadest, siis saame võrrandi

$$0{,}85x + 0{,}1y = 0{,}55(x+y),$$

kust

$$0{,}3x = 0{,}45y$$

$$2x = 3y$$

$$y = \frac{2}{3}x$$

Siit saame, et talus on $x + \frac{2}{3}x = \frac{5}{3}x$ looma.

Leiame, mitu protsenti moodustavad lambad talu loomadest: $\dfrac{x}{\frac{5}{3}x} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$.

Niisiis on 60% talu loomadest lambad.

2. ***Vastus:*** $m = \pm 13\sqrt{\frac{13}{2}}$ **.**

Lahendus. Kasutame Viète'i teoreemi, mille kohaselt taandatud ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendid x_1 ja x_2 rahuldavad tingimusi $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = q \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$.

Olgu ruutvõrrandi $4x^2 - 195x + m^2 = 0$ lahendid t ja t^2. Taandame ruutvõrrandi (lahendid ei muutu).

$$4x^2 - 195x + m^2 = 0 \quad |:4$$

$$x^2 - \frac{195}{4}x + \frac{m^2}{4} = 0$$

Viète'i valemite põhjal:

$$\begin{cases} t \cdot t^2 = \dfrac{m^2}{4} \\ t^2 + t = \dfrac{195}{4} \end{cases}$$

Esimesest võrrandist saame $t^3 = \frac{m^2}{4}$, kust $m = \pm 2\sqrt{t^3}$.

Ruutvõrrandi $t^2 + t - \frac{195}{4} = 0$ lahendid saame näiteks Viète'i teoreemi abil $t_1 = \frac{-15}{2}$ ja $t_2 = \frac{13}{2}$.

1) Kui $t = \frac{-15}{2}$, siis parameetril m reaalarvuline väärtus puudub.

2) Kui $t = \frac{13}{2}$, siis $m = \pm 2\sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^3} = \pm 13\sqrt{\frac{13}{2}} = \pm 6{,}5\sqrt{26}$.

3. *Tõestus.* Oletame vastuväiteliselt, et leiduvad sellised numbrid *x* ja *y*, mille korral $N \vdots 2013$. Et $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, siis peab arv $\overline{x2014y} \vdots 11$. Vastavalt 11-ga jaguvuse tunnusele (*arvu paaritutel kohtadel asetsevate numbrite summa ja paariskohtadel asetsevate numbrite summa vahe jagub 11-ga*) peab

$$[(x+0+4)-(2+1+y)] \vdots 11$$
$$(x-y+1) \vdots 11,$$

Leiame võimalikud x ja y väärtused:

$x - y + 1 = 0$, kust $x + 1 = y$.

$x - y + 1 = 11$, kust $x = 10 + y$, mis ei sobi kuna x ja y on numbrid.

Ehk $x + 1 = y$ on ainus võimalus.

Järgnevalt kasutame asjaolu, et $\overline{x2014y} \vdots 3$. Vastavalt 3-ga jaguvuse tunnusele *(arvu numbrite summa jagub 3-ga)* peab

$$(x+2+0+1+4+y) \vdots 3$$
$$(x+y+7) \vdots 3$$

Asendades siia eelnevalt saadud seose $y = x + 1$, saame

$$(x+x+1+7) \vdots 3$$
$$(2x+8) \vdots 3$$
$$2(x+4) \vdots 3,$$

millest $x \in \{2;5;8\}$.

Vaatleme neid võimalusi.

1) Kui $x = 2$, siis on arv $N = 220143$.
Nüüd kontrollime, kas arv 220143 jagub lisaks ka 61-ga.
$220143 : 61 = 3608{,}9... \Rightarrow 220143 \not\vdots 61$.

2) Kui $x = 5$, siis on arv $N = 520146$.
Nüüd kontrollime, kas arv 520146 jagub 61-ga.
$520146 : 61 = 8526{,}9... \Rightarrow 520146 \not\vdots 61$.

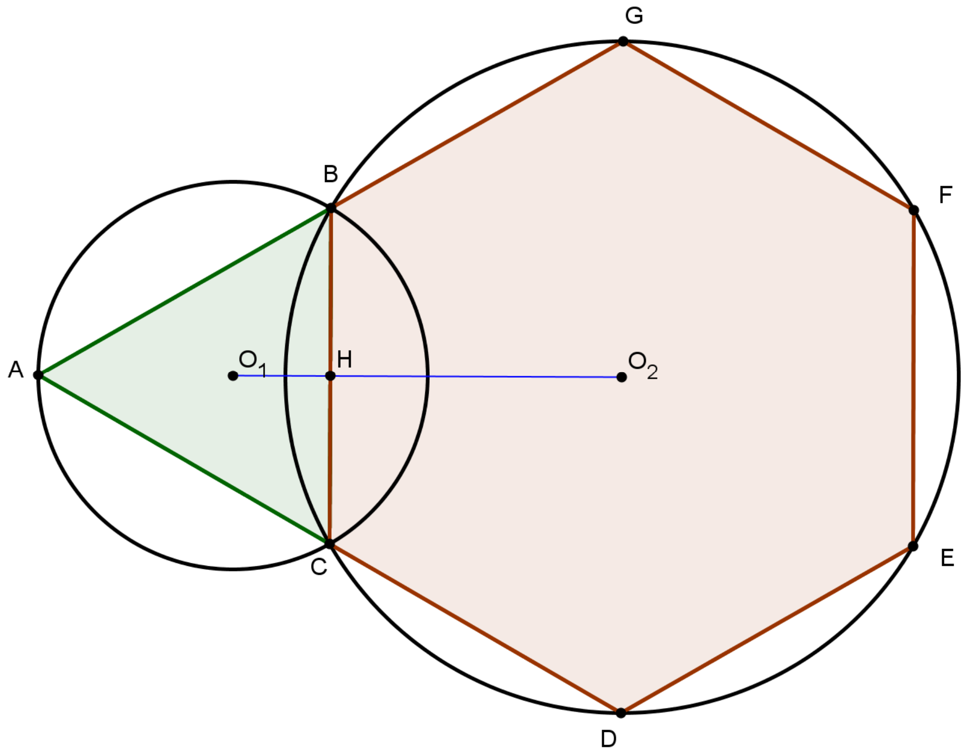
3) Kui $x = 8$, siis on arv $N = 820149$.
Nüüd kontrollime, kas arv 820149 jagub 61-ga.
$820149 : 61 = 13445{,}0... \Rightarrow 820149 \not\vdots 61$.

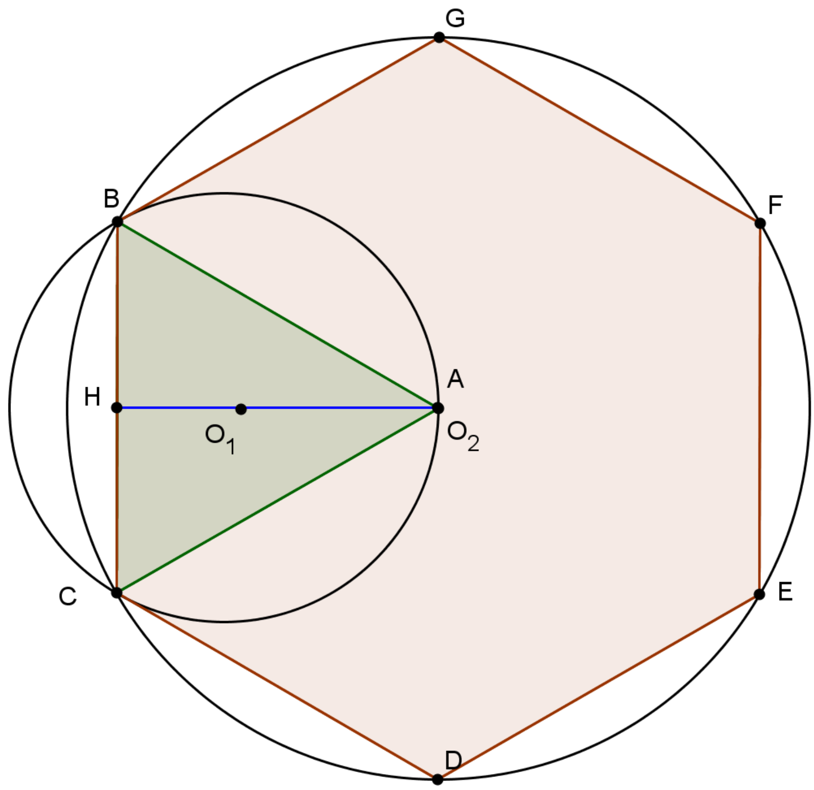
Niisiis selliseid numbreid *x* ja *y*, mille korral $N \vdots 2013$ ei leidu.

M. o. t. t.

4. *Vastus:* $\dfrac{\mathbf{10\sqrt{3}}}{\mathbf{3}}$ ***cm*** **või** $\dfrac{\mathbf{20\sqrt{3}}}{\mathbf{3}}$***cm***.

Lahendus. Paneme tähele, et vastavalt tekstile saame 2 võimalust: ringjoonte keskpunktid asuvad ühel pool kõõlu või erinevatel pooltel. Teeme seda arvestades kaks abistavat joonist.





Tähistame ringjoonte keskpunkte läbiva sirge ja kõõlu lõikepunkti tähega H. Kuna võrdkülgse kuusnurga külje ja ümberringjoone raadiuse pikkused on võrdsed, siis kolmnurk O_2BC on võrdkülgne, millest $CH = 5\,cm$ ja

$$O_2H = \sqrt{(CO_2)^2 - (CH)^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}\ (cm)$$

Kuna O_1 on ringjoone keskpunkt ja kolmnurk ABC on võrdkülgne, siis O_1 on ka mediaanide lõikepunkt, seega $AO_1 : O_1H = 2:1$.

Niisiis

$$AH = HO_2 \Rightarrow HO_1 = \frac{5\sqrt{3}}{3}\ (cm)$$

Kui ringjoonte keskpunktid on ühel pool kõõlu, siis

$$O_1O_2 = 5\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}\ (cm)$$

Kui ringjoonte keskpunktid on erineval pool kõõlu, siis

$$O_1O_2 = 5\sqrt{3} + \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3}\ (cm)$$

5. *Vastus:* **Kevin.**

Lahendus. Sõltuvalt sellest mitu kommi võtab Jüri, võtab Kevin igal käigul just nii palju komme, et kokku oleks käiguga võetud kommide arv 11.

Kui Jüri võtab 2 kommi, siis võtab Kevin 9 kommi, kui Jüri võtab 7 kommi, siis võtab Kevin 4 kommi, jne.

Et ühel võtmisel vähima ja suurima võimaliku võetud kommide arvu summa on just 11, siis on selline võimalus Kevinil alati olemas.

Tõepoolest, erinevaid võimalusi on 10.

$1+10=11$ $2+9=11$ $3+8=11$ $4+7=11$ $5+6=11$

$6+5=11$ $7+4=11$ $8+3=11$ $9+2=11$ $10+1=11$

Niisiis on pärast Kevini käiku laualt võetud kommide arv esimesel käigul 11, teisel käigul 22, kolmandal käigul 33, …

Kuna 2013 jagub arvuga 11, siis võtab Kevin ka viimase kommi.

HINDAMINE

1.	Võrrandi koostamise eest	3p
	Ühe muutuja avaldamise eest võrrandis	1p
	Talu loomade arvu ühe muutuja abil esitamise eest	1p
	Suhte leidmise eest	1p
	Õige vastuse eest	1p
		7p
2.	Viète´i teoreemile viitamise eest	1p
	Võrrandite koostamine eest	2p
	Esimeses võrrandis parameetri m väärtuse avaldamise eest	1p
	Teise võrrandi lahendamise eest	1p
	Lahenduse lõpuleviimise eest	1p
	<u>Märkus</u> Õige alternatiivse lahenduse eest anda igal juhul 7 punkti	**7p**
3.	11-ga jaguvuse kasutamise eest	3p
	3-ga jaguvuse kasutamise eest	3p
	Tõestuse korrektse lõpuleviimise eest	1p
		7p
4.	Lõigu O_2H pikkuse leidmise eest	2p
	Lõigu O_1H pikkuse leidmise eest	2p
	Lõigu O_1O_2 pikkuse leidmise eest	1p
	Ühe variandi täislahenduse eest	*5p*
	Märgatud, et on võimalik kaks varianti, eest	1p
	Teise variandi lõigu O_1O_2 pikkuse leidmise eest	1p
		7p
5.	Näidatud, et 2013 jagub 11-ga, eest	2p
	Selgituse, et Kevin saab käiguga võetud kommide arvu hoida arvul 11, eest	3p
	Selgituse, et Kevin saab sellise taktika korral viimase kommi, eest	1p
	Õige vastuse eest	1p
	<u>Märkus.</u> Selgitusteta õige vastuse eest panna 1p.	**7p**